Cálculo de límites

Ejercicio nº 1.-

Haz una gráfica en la que se reflejen estos resultados:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \ (f(x) > 2 \ \text{ si } \ x \to +\infty)$

c) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ **d)** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Ejercicio nº 2.-

Representa gráficamente los siguientes resultados:

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ (f(x) > 0 \ \text{ si } \ x \to -\infty)$

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Ejercicio nº 3.-

Representa en una gráfica los siguientes resultados:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \ (f(x) > 1 \ \text{ si } \ x \to -\infty)$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Ejercicio nº 4.-

Dibuja una gráfica en la que se reflejen los siguientes resultados:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ (f(x) < 0 \ \text{ si } \ x \to -\infty)$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

Ejercicio nº 5.-

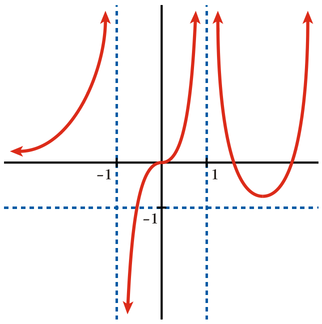
Representa gráficamente estos resultados:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \ (f(x) < 1 \ \text{ si } \ x \to +\infty)$

c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Ejercicio nº 6.-

Halla los siguientes límites, observando la gráfica de la función $f(x)$:

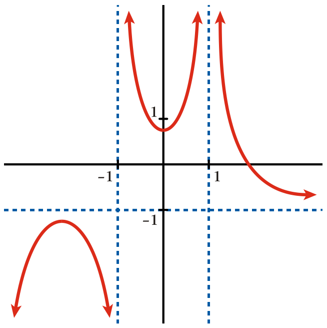


a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ f) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ g) $\lim_{x \to 0} f(x)$

Ejercicio nº 7.-

Halla, observando la gráfica de la función $f(x)$, los siguientes límites:

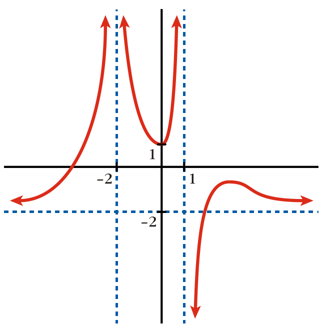


a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ f) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ g) $\lim_{x \to 0} f(x)$

Ejercicio nº 8.-

Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcula los límites siguientes:

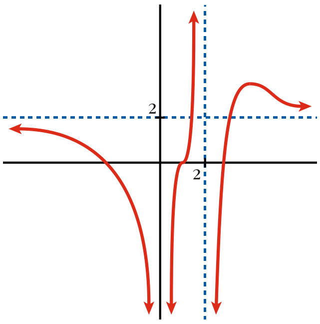


a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ f) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ g) $\lim_{x \to 0} f(x)$

Ejercicio nº 9.-

Calcula sobre la gráfica de esta función:

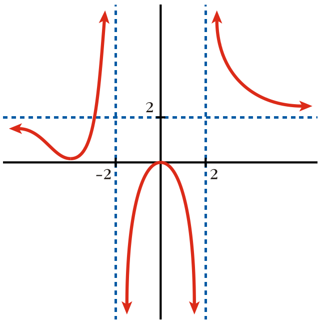


a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Ejercicio nº 10.-

La siguiente gráfica corresponde a la función *f* (*x*).



Calcula sobre ella:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Ejercicio nº 11.-

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3 - \log x\right]$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2 + 1}$

Ejercicio nº 12.-

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{\log x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{2^x}$

Ejercicio nº 13.-

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^x - x^2\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

Ejercicio nº 14.-

Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}$

Ejercicio nº 15.-

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x - x^2 + 1\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{\log x^2}$

Ejercicio nº 16.-

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$ b) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{\sqrt{4x^2+1}}$ c) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2}$

Ejercicio nº 17.-

Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-1}{x+1}-\dfrac{x^2}{x+2}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3x}{1+2x}\right)^{2x}$

Ejercicio nº 18.-

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+3x}{2x^2+x}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^{3x+1}$

Ejercicio nº 19.-

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-2}{2x+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{3x+2}\right)^{x+1}$

Ejercicio nº 20.-

Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{2x+3} - \dfrac{x^3}{x^2+1} \right]$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{18x^4+3x^2}{2x^4+3}}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{6x+2}{3x+1} \right)^{x-1}$

Ejercicio nº 21.-

Calcula el límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$$

Ejercicio nº22.-

Halla el límite:

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{2x}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} \right]$$

Ejercicio nº 23.-

Calcula:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}$$

Ejercicio nº 24.-

Halla el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}$$

Ejercicio nº 25.-

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} \right]$$

Ejercicio nº 26.-

Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad (evitable, infinita ...):

$$f(x) = \frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1}$$

Ejercicio nº 27.-

Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta (evitable, infinita ...):

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$$

Ejercicio nº 28.-

Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 29.-

Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Ejercicio nº 30.-

Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 3^x & \text{si} \quad x<0 \\ -x^2+x+1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ x+2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 31.-

Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4x^2+ax+6 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 32.-

Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3a+2^x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

__Ejercicio nº 33.-__

Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & \text{si} \quad x<2 \\ 2x^2+ax & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

__Ejercicio nº 34.-__

Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+a & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x^2-3a+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

__Ejercicio nº 35.-__

Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x=2$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x<2 \\ k & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Soluciones Cálculo de límites

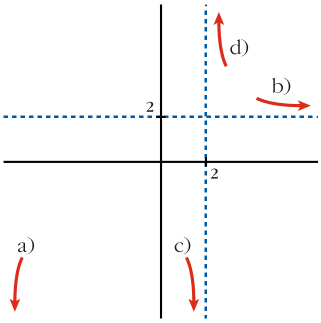
__Ejercicio nº 1.-__

Haz una gráfica en la que se reflejen estos resultados:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \ \left(f(x)>2 \ \text{ si } \ x\to+\infty\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

Solución:



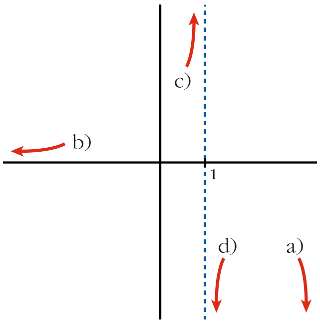
Ejercicio nº 2.-

Representa gráficamente los siguientes resultados:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \; (f(x) > 0 \;\; \text{si} \;\; x \to -\infty)$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Solución:



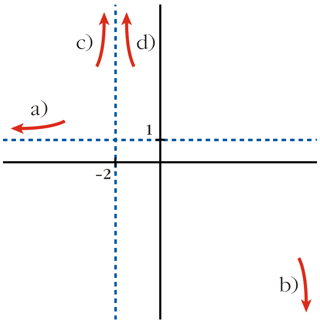
Ejercicio nº 3.-

Representa en una gráfica los siguientes resultados:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \; (f(x) > 1 \;\; \text{si} \;\; x \to -\infty)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Solución:



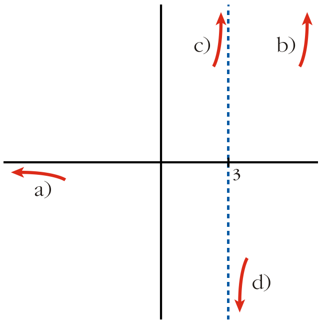
Ejercicio nº 4.-

Dibuja una gráfica en la que se reflejen los siguientes resultados:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \; (f(x) < 0 \;\; \text{si} \;\; x \to -\infty)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

Solución:



Ejercicio nº 5.-

Representa gráficamente estos resultados:

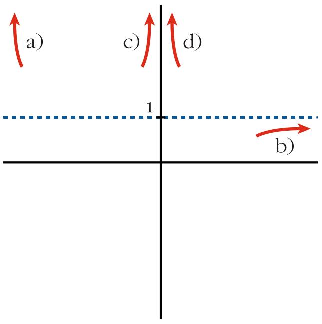
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \ (f(x) < 1 \text{ si } x \to +\infty)$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

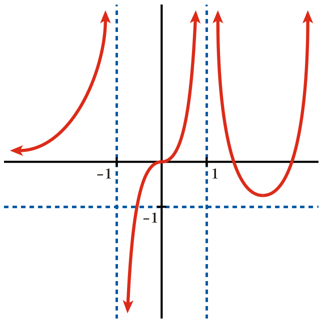
d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Solución:



Ejercicio nº 6.-

Halla los siguientes límites, observando la gráfica de la función *f* (*x*):



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

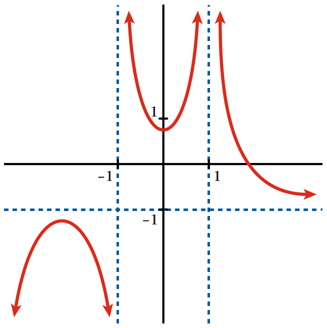
Solución:

a) $\underset{x \to -\infty}{lím} f(x) = -1$ b) $\underset{x \to +\infty}{lím} f(x) = +\infty$ c) $\underset{x \to -1^-}{lím} f(x) = +\infty$ d) $\underset{x \to -1^+}{lím} f(x) = -\infty$

e) $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x) = +\infty$ f) $\underset{x \to 1^+}{lím} f(x) = +\infty$ g) $\underset{x \to 0}{lím} f(x) = 0$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Halla, observando la gráfica de la función *f* (*x*), los siguientes límites:



a) $\underset{x \to -\infty}{lím} f(x)$ **b)** $\underset{x \to +\infty}{lím} f(x)$ **c)** $\underset{x \to -1^-}{lím} f(x)$ **d)** $\underset{x \to -1^+}{lím} f(x)$

e) $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x)$ **f)** $\underset{x \to 1^+}{lím} f(x)$ **g)** $\underset{x \to 0}{lím} f(x)$

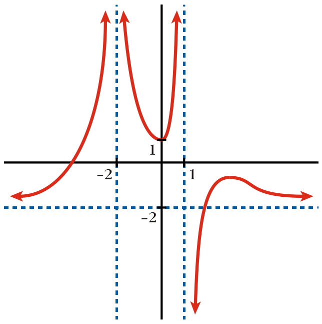
Solución:

a) $\underset{x \to -\infty}{lím} f(x) = -\infty$ b) $\underset{x \to +\infty}{lím} f(x) = -1$ c) $\underset{x \to -1^-}{lím} f(x) = -\infty$ d) $\underset{x \to -1^+}{lím} f(x) = +\infty$

e) $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x) = +\infty$ f) $\underset{x \to 1^+}{lím} f(x) = +\infty$ g) $\underset{x \to 0}{lím} f(x) = \frac{1}{2}$

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Dada la gráfica de la función *f* (*x*), calcula los límites siguientes:



a) $\underset{x \to -\infty}{lím} f(x)$ **b)** $\underset{x \to +\infty}{lím} f(x)$ **c)** $\underset{x \to -2^-}{lím} f(x)$ **d)** $\underset{x \to -2^+}{lím} f(x)$

e) $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x)$ **f)** $\underset{x \to 1^+}{lím} f(x)$ **g)** $\underset{x \to 0}{lím} f(x)$

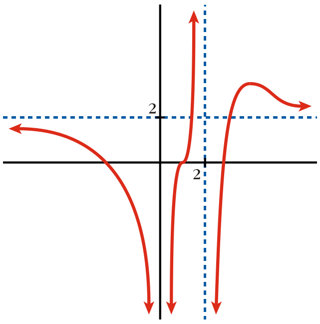
Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ g) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Calcula sobre la gráfica de esta función:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

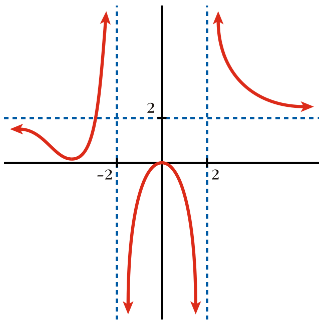
Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ c) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$ g) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

La siguiente gráfica corresponde a la función *f* (*x*).



Calcula sobre ella:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^3 - \log x\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^3 - \log x\right] = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3^{-x}}{x^2+1} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-2}{\log x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{2^x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logartimos.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{2^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[2^x - x^2\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[2^x - x^2\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

Ejercicio nº 14.-

Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^{\frac{9}{2}}\right] = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{-x+1} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

Ejercicio nº 15.-

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x-x^2+1\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{\log x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x-x^2+1\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{\log x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

Ejercicio nº 16.-

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$ b) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{\sqrt{4x^2+1}}$ c) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+3x^2-x^4-x^3}{x^3+x^2+x+1} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = +\infty$$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-4}{\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{4x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{+\infty} = 0$

Ejercicio nº 17.-

Calcula los límites:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^2-1}{x+1} - \frac{x^2}{x+2}\right]$ **c)** $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^{2x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^2-1}{x+1} - \frac{x^2}{x+2}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^2-1)(x+2) - x^2(x+1)}{(x+1)(x+2)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - x - 2 - x^3 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

Ejercicio nº 18.-

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{8x^2+3x}{2x^2+x}}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+1}\right]$ **c)** $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{3x+1}$

Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{8x^2+3x}{2x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{8x^2+3x}{2x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{8x^2}{2x^2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x^2+1) - x^3(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^2 - x^4 - 2x^3}{x^3 + 2x^2 + x + 2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3 + x^2}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = -2$$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{3x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

Ejercicio nº 19.-

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-2}{2x+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{3x+2}\right)^{x+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-2}{2x+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-2)(x+1)-2x^2(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x-2-4x^3-2x^2}{2x^2+2x+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^3-x^2-2x-2}{2x^2+3x+1}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{9x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{3x}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{3x+2}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$

Ejercicio nº 20.-

Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{2x+3}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{18x^4+3x^2}{2x^4+3}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x+2}{3x+1}\right)^{x-1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{2x+3}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(x^2+1)-x^3(2x+3)}{(2x+3)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+x^2-2x^4-3x^3}{2x^3+3x^2+2x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4-3x^3+x^2}{2x^3+3x^2+2x+3}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{18x^4+3x^2}{2x^4+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{18x^4+3x^2}{2x^4+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{18x^4}{2x^4}}=\sqrt{9}=3$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x+2}{3x+1}\right)^{x-1}=\left(\dfrac{6}{3}\right)^{+\infty}=2^{+\infty}=+\infty$

Ejercicio nº 21.-

Calcula el límite:

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$$

Solución:

$$\underset{x\to -1}{lím}\frac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}=\underset{x\to -1}{lím}\frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)}=\underset{x\to -1}{lím}\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=\frac{-5}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\underset{x\to -1^-}{lím}\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=-\infty\ ;\qquad \underset{x\to -1^+}{lím}\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=+\infty$$

<u>Ejercicio nº22.-</u>

Halla el límite:

$$\underset{x\to 3}{\boldsymbol{lím}}\left[\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{9}}-\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}\right]$$

Solución:

$$\underset{x\to 3}{lím}\left[\frac{2x}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}\right]=\underset{x\to 3}{lím}\frac{2x-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\underset{x\to 3}{lím}\frac{2x-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=\underset{x\to 3}{lím}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{-18}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\underset{x\to 3^-}{lím}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=+\infty\ ;\qquad \underset{x\to 3^+}{lím}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=-\infty$$

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Calcula:

$$\underset{x\to 1}{\boldsymbol{lím}}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{7}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}$$

Solución:

$$\underset{x\to 1}{lím}\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}=\underset{x\to 1}{lím}\frac{(2x+1)(x-1)^2}{(3x-2)(x-1)^2}=\underset{x\to 1}{lím}\frac{2x+1}{3x-2}=3$$

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

Halla el valor del siguiente límite:

$$\underset{x\to 2}{\boldsymbol{lím}}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}-\mathbf{10}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}}$$

Solución:

$$\underset{x\to 2}{lím}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}=\underset{x\to 2}{lím}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}=\underset{x\to 2}{lím}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=\frac{9}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\underset{x\to 2^-}{lím}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=-\infty\ ;\qquad \underset{x\to 2^+}{lím}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=+\infty$$

<u>Ejercicio nº 25.-</u>

Calcula el siguiente límite:

$$\underset{x\to 1}{\boldsymbol{lím}}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}-\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}\right]$$

Solución:

$$\underset{x\to 1}{lím}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right]=\underset{x\to 1}{lím}\frac{x+1-3}{(x-1)(x+1)}=\underset{x\to 1}{lím}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\underset{x\to 1^-}{lím}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=+\infty;\quad \underset{x\to 1^+}{lím}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=-\infty$$

<u>Ejercicio nº 26.-</u>

Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad (evitable, infinita ...):

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}$$

Solución:

- *Dominio* $=\boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$

  $f(x)$ es continua en $\boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$

- Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en $x=-1$ y en $x=1$.

$$\underset{x\to -1}{lím}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1}=\underset{x\to -1}{lím}\frac{(x+1)^2(x-3)}{(x+1)(x-1)}=\underset{x\to -1}{lím}\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}=\frac{0}{-2}=0\quad\to$$

$\to$ Discontinuidad evitable en $x=-1$

$$\underset{x\to 1}{lím}\,f(x)=\underset{x\to 1}{lím}\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}=\frac{-4}{(0)}.$$ Hallamos los límites laterales.

$$\underset{x\to 1^-}{lím}\,f(x)=+\infty;\quad \underset{x\to 1^+}{lím}\,f(x)=-\infty$$

Discontinuidad infinita en $x=1$. Hay una asíntota vertical.

Ejercicio nº 27.-

Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta (evitable, infinita ...):

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}}$$

Solución:

- Dominio: ***R***

$$x^2+3x-10=0 \quad \to \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases}$$

$Dominio = \boldsymbol{R} - \{-5, 2\}$

- $f(x)$ es continua en $\boldsymbol{R}- \{-5, 2\}$

- Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en $x=-5$ y en $x=2$:

$$\lim_{x\to -5} f(x)=\lim_{x\to -5}\frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to -5}\frac{3x+4}{x+5}=\frac{-11}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=+\infty; \quad \lim_{x\to -5^+} f(x)=-\infty$$

Discontinuidad infinita en $x=-5$. Hay una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{x+5}=\frac{10}{7}$$

Discontinuidad evitable en $x=2$.

Ejercicio nº 28.-

Estudia la continuidad de la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} & x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} & 0\le x<1 \\ 4 & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}}$$

Solución:

- $Dominio = \boldsymbol{R}$

- Si $x\neq 0$ y $x\neq 1 \quad \to \quad f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+1\right)=1\\ f(0)=1\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=0$$

- En $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+1\right)=4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 4=4\\ f(1)=4\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=1$$

- Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio nº 29.-

Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & \text{si} \quad x<-1\\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<2\\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Solución:

- *Dominio* $=\mathbb{R}$
- Si $x\neq 1$ y $x\neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, *pues* está formada por polinomios, que son funciones continuas.
- En $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-2x-3\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2-2\right)=-1\\ f(-1)=-1\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=-1$$

- En $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-2\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x+1\right)=7\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}f(x) \text{ no es continua en } x=2, \text{ pues}\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\end{array}$$

No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Ejercicio nº 30.-

Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}3^x & \text{si} \quad x<0\\ -x^2+x+1 & \text{si} \quad 0\le x<1\\ x+2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Solución:

- Dominio $= \boldsymbol{R}$
- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 3^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-x^2 + x + 1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-x^2 + x + 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 2) = 3 \end{array}\right\} f(x) \text{ no es continua en } x = 1$$

No existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

Ejercicio nº 31.-

Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ para que la siguiente función sea continua:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ 4x^2 + ax + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Solución: R

- Si $x \neq 1$ $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(ax^2 - 2x + a\right) = 2a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(4x^2 + ax + 6\right) = a + 10 \\ f(1) = a - 2 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser:

$2a - 2 = a + 10 \rightarrow a = 12$

Ejercicio nº 32.-

Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + 2^x & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Solución:

- Si $x \neq 1 \quad \to \quad$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(ax^2 + 3x - 1\right) = a + 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(3a + 2^x\right) = 3a + 2 \\ f(1) = a + 2 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser:

$a + 2 = 3a + 2 \quad \to \quad -2a = 0 \quad \to \quad a = 0$

<u>Ejercicio nº 33.-</u>

Halla el valor de *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x^2 + ax & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x \neq 2 \quad \to \quad$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - a) = 6 - a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(2x^2 + ax\right) = 8 + 2a \\ f(2) = 8 + 2a \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser:

$6 - a = 8 + 2a \quad \to \quad -2 = 3a \quad \to \quad a = \dfrac{-2}{3}$

<u>Ejercicio nº 34.-</u>

Halla el valor de *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 3a + 5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x \neq 1 \quad \to \quad$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(2^x + a\right) = 2 + a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2 - 3a + 5\right) = 6 - 3a \\ f(1) = 2 + a\end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser:

$2 + a = 6 - 3a \ \rightarrow\ 4a = 4 \ \rightarrow\ a = 1$

<u>Ejercicio nº 35.-</u>

Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } \ x < 2 \\ k & \text{si } \ x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de tenerse que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} k = k \\ f(2) = k\end{array}\right\}$$

Por tanto, ha de ser $k = 3$.